Tentamen Lineaire Algebra, Oude Stijl, dinsdag 17 april 2007

De toets bestaat uit 4 vraagstukkken. U krijgt 180 minuten om deze vraagstukken te beantwoorden. De puntenwaardering kunt u vinden aan het einde van de vraagstukken.

1. Voor een gegeven geheel getal n is $P_n(\mathbb{R})$ de vectorruimte over $\mathbb{R}$ van alle polynomen van graad hoogstens n, met reële coefficienten.

a. Geef een basis van $P_n(\mathbb{R})$.

b. Bepaal de dimensie van $P_n(\mathbb{R})$.

Een polynoom $p(x)$ heet *even* indien voor all x geldt $p(x) = p(-x)$. Laat $E_n(\mathbb{R})$ de deelverzameling van $P_n(\mathbb{R})$ zijn bestaande uit de even polynomen van graad hoogstens n.

c. Laat zien dat $E_n(\mathbb{R})$ een deelruimte is van $P_n(\mathbb{R})$.

d. Neem nu $n = 6$. Bepaal een basis van $E_6(\mathbb{R})$.

e. Bepaal de de dimensie van $E_6(\mathbb{R})$.

2. We bekijken de lineaire afbeelding $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ die gedefinieerd wordt door

$$T(a_1, a_2, a_3) := (a_2, -a_1, 2a_3)$$

a. Bepaal de matrix van T ten opzichte van de standaarbasis $\alpha = \{e_1, e_2, e_3\}$ van $\mathbb{C}^3$.

b. Toon aan dat T een isomorfie is.

c. Bepaal het karakteristieke polynoom van T.

d. Bereken de eigenwaarden van T.

e. Bepaal een basis β van $\mathbb{C}^3$ zodat de matrix van T ten opzichte van β een diagonaalmatrix is.

3. Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a. Bepaal de rang van A.

b. Bepaal de dimensie van de nulruimte $N(A)$ van A.

c. Bepaal de oplossingsverzameling van het homogene stelsel $Ax = 0$.

d. Laat de vector b gegeven zijn door

$$b = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

e. Bepaal de oplossingsverzameling van het stelsel $Ax = b$.

4. Stel $T : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ de afbeelding die aan elke matrix M zijn getransponeerde M^t toevoegd, d.w.z. $T(M) := M^t$.

a. Toon aan dat T een lineaire afbeelding is.

b. Toon aan dat T slechts twee eigenwaarden heeft, namelijk 1 en -1.

c. Geef een beschrijving van de eigenruimten behorend bij deze eigenwaarden.

d. Neem nu aan dat $n = 2$. Bepaal een geordende basis β van $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ zodanig dat $[T]_\beta$ een diagonaalmatrix is.

Puntenwaardering:

Vraagstuk 1: 24
Vraagstuk 2: 22
Vraagstuk 3: 22
Vraagstuk 4: 22